

2020年天津红桥区高三一模数学试卷

一、选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x|x > 0\}$, $B = \{x|x \geq 1\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) = (\quad)$.

- A. $\{x|0 < x < 1\}$ B. $\{x|0 < x \leq 1\}$ C. $\{x|x < 0\}$ D. $\{x|x > 1\}$

2. 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是 $(\quad)$.

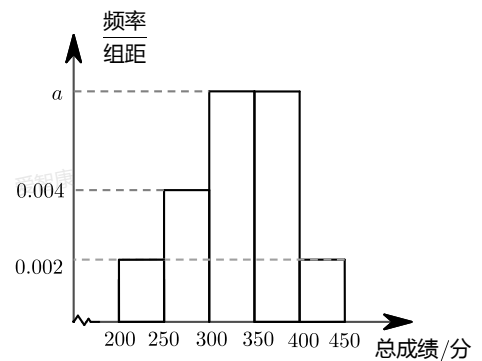
- A. $y = x^{\frac{1}{2}}$ B. $y = 2^x$ C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ D. $y = -\frac{1}{x}$

3. 已知 $a = \ln \pi$, $b = \log_{\frac{1}{2}} 5$, $c = e^{-\frac{1}{2}}$, 则 $(\quad)$.

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $a > c > b$

4. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $|x-1| < 2$ ” 是 “ $x^2 < x$ ” 的 $(\quad)$.

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 某地区教育主管部门为了对该地区模拟考试进行分析, 随机抽取了200分到450分之间的2000名学生的成绩, 并根据这2000名学生的成绩画出样本的频率分布直方图, 如图所示, 则成绩在 $[250, 350]$ 内的学生人数为 $(\quad)$.

- A. 800 B. 1000 C. 1200 D. 1600

6. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x (\omega > 0)$, $y = f(x)$ 的图像与直线 $y = 2$ 的两个相邻交点的距离等于 π , 则 $f(x)$ 的一条对称轴是 $(\quad)$.

- A. $x = -\frac{\pi}{12}$ B. $x = \frac{\pi}{12}$ C. $x = -\frac{\pi}{3}$ D. $x = \frac{\pi}{3}$

7. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 交于 P, Q 两点, 若 $|PQ| = |OF|$, 则 C 的离心率为 $(\quad)$.

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, 且 $a_{n+1} = 4a_n + 3 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $(\quad)$.

- A. $2^{2n-1} + 1$ B. $2^{2n-1} - 1$ C. $2^{2n} + 1$ D. $2^{2n} - 1$

9. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有三个零点, 则 ().
- A. $a < -1, b < 0$ B. $a < -1, b > 0$ C. $a > -1, b < 0$ D. $a > -1, b > 0$

二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

10. 已知复数 $z = (a + 2i)(1 + i)$, 其中 i 为虚数单位, 若复数 z 为纯虚数, 则实数 a 的值是 _____ .

11. 在 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中, x 的系数等于 _____ .

12. 一个袋中装着标有数字1, 2, 3, 4, 5的小球各2个, 从中任意摸取3个小球, 每个小球被取出的可能性都相等, 则取出的3个小球中数字最大的为4的概率是 _____ .

13. 曲线 $y = (x^2 + 1)e^x$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 _____ .

14. 已知 $x > 0, y > 0, x + 3y = 5xy$, 则 $x + 2y$ 的最小值是 _____ .

15. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$, 且已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 60° , $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, 则 $|\vec{c}|$ 的最小值是 _____ .

三、解答题

(本大题共5小题, 每小题15分, 共75分)

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , $b \sin A = 3c \sin B, a = 3, \cos B = \frac{2}{3}$.
- (1) 求 b 的值 .
- (2) 求 $\cos\left(2B - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值 .

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列 ($n \in \mathbf{N}^*$) , $a_1 = 2$, 且 $2a_1, a_3, 3a_2$ 成等差数列 .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $b_n = \log_2 a_n$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 , 记 $T_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \cdots + \frac{1}{S_n}$, 证明 : $1 \leq T_n \leq 2$.

18. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且过点 $\left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设 Q 是椭圆 C 上且不在 x 轴上的一个动点， O 为坐标原点，过右焦点 F 作 OQ 的平行线交椭圆于 M 、 N 两个不同的点，求 $\frac{|MN|}{|OQ|^2}$ 的值。

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 证明 : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} < \frac{4}{3}$.

20. 已知函数 $f(x) = \ln x - a(x - 1)$, a 为实数, 且 $a > 0$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的值域. (其中 e 为自然对数的底数)